ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option TA)

⁂

CONCOURS D'ADMISSION 1985

***

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION P'

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHS II — P'

NOTATIONS

$\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers naturels strictement positifs.

$\mathbb{R}^*$: ensemble des réels différents de zéro.

$\mathcal{R}ez, \mathcal{I}mz$: partie réelle et partie imaginaire respectivement d'un nombre complexe z.

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $\{ z \mid z \in \mathbb{C} , \mathcal{I}m\, z \neq 0 \}$

$\mathbb{C}[X]$: ensemble des polynômes construits sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}(X)$: ensemble des fractions rationnelles construites sur $\mathbb{C}$; un élément R de $\mathbb{C}(X)$ sera désigné par P/Q où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux. Les racines du polynôme Q seront appelées pôles de la fraction R.

E : sous-ensemble de $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles qui n'ont pas de pôles réels et telles que le degré du polynôme Q excède celui de P d'au moins 1, auquel on adjoint la fraction nulle.

x,y,s,t : éléments de $\mathbb{R}$.

a,b : éléments de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; il sera posé : $a_1 = \mathcal{R}ea$, $a_2 = \mathcal{I}ma$; il vient $a_2 \neq 0$.

Si f est une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}$ ou seulement sur $\mathbb{R}^*$, il sera posé :

$$\overline{f} : x \longmapsto \overline{f(x)} \quad , \qquad f^* : x \longmapsto f(-x)$$

Si R désigne une fraction rationnelle appartenant à E, la lettre R désignera aussi l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $x \longmapsto R(x)$; R' désignera la dérivée de cette fonction.

1ère PARTIE

Soit B le sous-ensemble de E :

$$B = \{ F \mid F \in E \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) = \frac{1}{(x - a)^n} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \ , \ a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \}$$

1° - Montrer que ce sous-ensemble B de E est une famille libre, génératrice de E.

2° - Soient R et S deux éléments de E ; montrer que l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \, S(x) \, dx$$

est absolument convergente. En déduire que pour tout couple $(R, S) \in E^2$, il existe une application, notée $R_* S$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la relation :

$$(R_* S)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t) \, S(x - t) \, dt \ .$$

Démontrer : $R_* S = S_* R$; exprimer $(R_* S)^*$ et $\overline{R_* S}$ au moyen d'un produit $*$ de fractions déduites simplement de R et S.

3° - Soit $f_{a,p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la fraction rationnelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f_{a,p}(x) = \frac{(p - 1)!}{2i\pi (x - a)^p} \ .$$

a) Calculer $f_{a,1} * f_{b,1}$ $[(a, b) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2]$; indication : établir le résultat suivant :

soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; $\lim\limits_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} \frac{dt}{t - a} = i\pi \, \mathrm{sgn}(a_2)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, sgn(x) vaut 1 si $x > 0$, - 1 si $x < 0$.

b) Etablir plus généralement la propriété :

$$f_{a,p} * f_{b,q} = S(a, b) \, f_{a+b,p+q-1}$$

$$S(a,b) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{I}m a \ . \ \mathcal{I}m b < 0 \\ 1 \text{ si } \mathcal{I}m a > 0 \text{ et } \mathcal{I}m b > 0 \\ -1 \text{ si } \mathcal{I}m a < 0 \text{ et } \mathcal{I}m b < 0. \end{cases}$$

Remarque : Lorsque a + b est réel, bien que la fonction $f_{a+b,p+q-1}$ ne soit pas définie, la relation ci-dessus sera considérée comme valable car S(a,b) est alors nul.

Indication : Montrer et utiliser la propriété :

$$\left(f_{a,p} * f_{b,q} \right)(x) = \lim_{\substack{M \to \infty \\ N \to \infty}} \int_{-M}^{N} \lambda \left(\frac{1}{t - a} - \frac{1}{t - x + b} \right) dt \ .$$

λ est un nombre complexe.

4° - En déduire que pour tout couple $(R, S) \in E^2$, la fonction $R_* S$ est une fraction rationnelle qui appartient à E et que cette loi de composition dans E est associative.

En déduire : l'espace vectoriel E, muni de cette loi de composition, est un anneau commutatif qui possède des diviseurs de zéro (c'est-à-dire $\exists \, (R, S) \in E^2$, $R \neq 0$, $S \neq 0$, $R_* S = 0$).

5° - Soit $R \in E$; montrer qu'il existe un couple unique (R_+, R_-) tel que : $R = R_+ + R_-$.

R_+ et R_- sont des éléments de E tels que les pôles de R_+ et de R_- sont respectivement dans les demi-plans supérieur et inférieur.

Application : Soit $\alpha > 0$; donner une expression simple de $(f_{i\alpha,1} * R)(x)$.

6° - Soient α et β deux réels donnés strictement positifs ; soient G_α et H_α les fractions définies par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\quad G_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}\ ,\qquad H_\alpha(x) = \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}\ ;$$

Calculer $G_\alpha * G_\beta$ et $H_\alpha * H_\beta$.

7° - Soit $(R, S) \in E^2$; montrer : $(R*S)' = R'*S = R*S'$

Remarque : Les démonstrations faisant appel à une dérivation sous le signe intégrale sont hors programme.

8° - Soit $p \in \mathbb{N}^*$; montrer que si les deux éléments R et S de E vérifient les relations :

$$\lim_{x\to\infty} x^p R(x) = 0\ ,\qquad \lim_{x\to\infty} x^p S(x) = 0\ ,$$

il en est de même pour $R*S$: $\lim_{x\to\infty} x^p (R*S)(x) = 0$.

2ème PARTIE

1° - Soit ρ_t la fonction complexe, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\rho_t(x) = \frac{\exp(it\,x)}{x - i}$$

t est un réel donné ; démontrer que l'intégrale de cette fonction continue ρ_t est convergente (en $+\infty$ et en $-\infty$), si et seulement si t est différent de zéro. Soit σ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(it\,x)}{x - i}\,dx\ .$$

Il sera admis dans la suite : $\sigma(t) = \begin{cases} 2i\pi\, e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

2° - Soit $R \in E$; montrer que les intégrales des fonctions $x \longmapsto \exp(2i\pi\, tx).R(x)$ et $x \longmapsto \exp(2i\pi\, tx).R'(x)$ sont convergentes sur $\mathbb{R}$ pour t réel différent de zéro et qu'elles vérifient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\, tx}.\, R'(x)\,dx = (-2i\pi\, t).\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\, tx}.\, R(x)\,dx.$$

Désignons, pour tout R de E, par $\varphi(R)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\varphi(R)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\, tx}.\, R(x)\,dx.$$

φ est une application de E dans l'espace des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}^*$; exprimer $\varphi(R)^*$ et $\overline{\varphi(R)}$ à l'aide d'images par φ de fractions de E se déduisant simplement de R.

3° - Déterminer la fonction $F_{a,p}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$, définie sur $\mathbb{R}^*$, image par l'application φ de la fraction $f_{a,p}$.

En déduire : pour tout R de E, la fonction $\varphi(R)$ est une fonction indéfiniment dérivable sur les demi-droites $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$; lorsque le réel t tend vers zéro par valeurs strictement supérieures ou strictement inférieures, $\varphi(R)(t)$ admet une limite finie ; enfin, pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, la limite de $t^q\, \varphi(R)(t)$ est nulle, que t tende vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

4° - En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale de la fonction $t \longmapsto \exp(-2i\pi tx)\, \varphi(R)(t)$ est convergente sur $]-\infty, 0[$ ainsi que sur $]0, +\infty[$; démontrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\, tx}.\, \varphi(R)(t)\, dt.$$

3ème PARTIE

Soit V l'espace vectoriel des fonctions complexes définies dans $\mathbb{R}^*$, indéfiniment dérivables dans les deux demi-droites $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

1° - Montrer que l'application φ de E dans V est linéaire et injective mais n'est pas surjective. Est-ce que la fonction G définie par $t \longmapsto \exp(-\alpha\,|t|)$, $\alpha > 0$, appartient à V ? Si oui, déterminer son antécédent $\varphi^{-1}(G)$.

2° - Soient F et G deux fonctions appartenant à $\varphi(E)$; montrer que la fonction $F.G : t \longmapsto F(t).G(t)$ appartient aussi à $\varphi(E)$.

3° - Démontrer que pour tout couple $(R, S) \in E^2$, il vient :

$$\varphi(R_* S) = \varphi(R).\varphi(S)$$

4ème PARTIE

Soient f et g deux fonctions de $\varphi(E)$.

1° - Montrer que la fonction $f.g : t \longmapsto f(t).g(t)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, admet des intégrales absolument convergentes sur chacune des demi-droites $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$.

2° - Soit $f_* g$ la fonction définie dans $\mathbb{R}^*$ par :

$$(f_* g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, g(t - s)ds$$

a) Calculer $F_{a,1*} F_{b,1}$ $[(a, b) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2]$; puis $(F_{a,1})^p_*$ c'est-à-dire : $F_{a,1*} F_{a,1*} \cdots * F_{a,1}$, p fois ; $p \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer : $\forall\, (a, b) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$: $\varphi(f_{a,1}.f_{b,1}) = F_{a,1*} F_{b,1}$; envisager les deux cas : $a \neq b$ et $a = b$.

En déduire : $\varphi(f_{a,p}.\, f_{b,q}) = F_{a,p*} F_{b,q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$.

c) Démontrer : $\forall (R, S) \in E^2$, $\varphi(R.S) = \varphi(R)_*\varphi(S)$.

3° - Soient u et v deux éléments de E ou de $\varphi(E)$; on pose :

$$(u|v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$$

Démontrer : $\forall (R, S) \in E^2$, $(R|S) = (\varphi(R)|\varphi(S))$.